Fourier Transform

Fourier Transform

$$f(t) \rightarrow F(j\omega)$$

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$$

تبدیل فوریه توابع زیر را محاسبه کنید.

$$x(t) = e^{-\alpha|t|}, \alpha > 0$$

$$f(t) = rect(\frac{t}{T})$$

Fourier Transform properties

۱) خطی بودن

$$a\,x(t) + b\,h(t) \rightarrow a\,X(j\omega) + b\,H(j\omega)$$

۲) تغییر مقیاس

$$f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

۳) شیفت زمانی

$$f(t - t_0) \rightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

۴) شیفت فرکانسی

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \rightarrow F(j\omega - j\omega_0)$$

۵) کانولوشن در حوزه زمان

$$x(t) * h(t) \rightarrow X(j\omega)H(j\omega)$$

Fourier Transform properties

۶) ضرب در حوزه زمان

$$x(t)y(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$$

۷) مشتق زمانی

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \rightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

۸) انتگرال زمانی

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \rightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

۹) فرمول پارسوال

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)h^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)H^*(j\omega)d\omega$$

۱۰) تئوری انرژی

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

۱۱) دوگانی (Duality)

Duality

$g(t) \rightarrow f(\omega)$

$f(t) \rightarrow 2\pi\, g(-\omega)$

مثال: تبدیل فوریه توابع زیر را به دست آورید.

A) $x(t) = \delta(t)$

B) $g(t) = 1$

مثال: تبدیل فوریه تابع زیر را حساب کنید.

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

مثال: تبدیل فوریه تابع $\delta(at - b)$ را محاسبه کنید.

مثال: اثبات کنید:

A) $Cos(\omega_0 t) \rightarrow \ \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$

B) $Sin(\omega_0 t) \rightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

$$x(t)Cos(\omega_0 t) \rightarrow \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0)$$

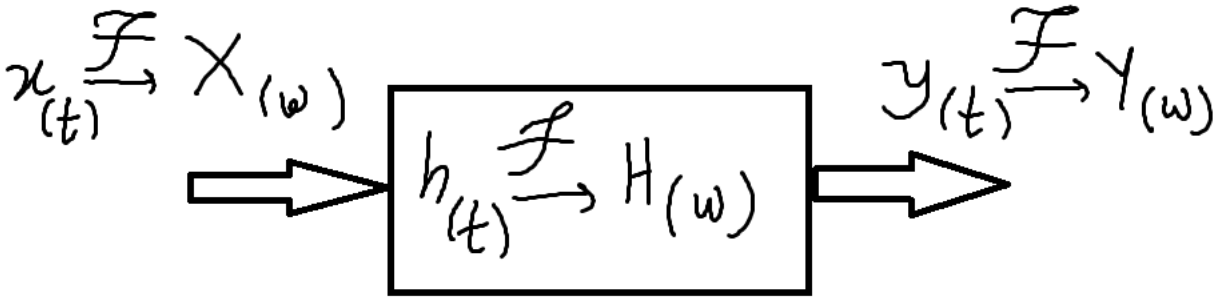
تبدیل فوریه توابع متناوب

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

پاسخ فرکانسی سیستم LTI

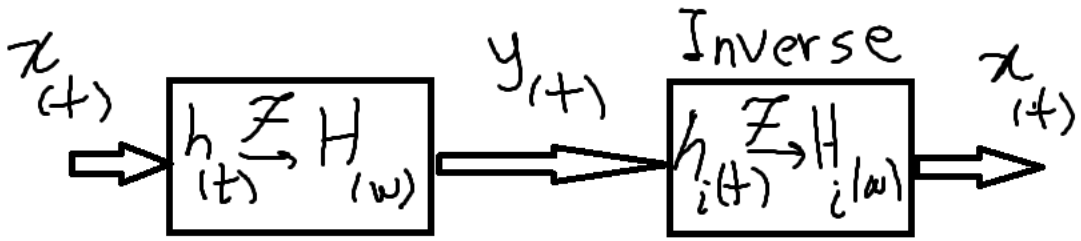


$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

سیستم معکوس



$$h_{(t)} * h_{i(t)} = \delta_{(t)}$$

$$H_{(w)} \cdot H_{i(w)} = 1$$

$$H_{i(w)} = \frac{1}{H_{(w)}}$$

مثال: (الف) پاسخ فرکانسی سیستم توصیف شده توسط معادله دیفرانسل $\dot{y} + 2y = x$ را به دست آورید. (ب) پاسخ فرکانسی سیستم معکوس را نیز محاسبه کنید.

مثال: سیستمی با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-at}u(t), a > 0$ دارای ورودی $x(t) = e^{-bt}u(t), b > 0$ که در آن $a \neq b$ است، داریم. خروجی را محاسبه کنید.

مثال: پاسخ ضربه سیستمی با معادله دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید.

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y(t) = \dot{x} + 2x$$